

Fall eines Papierkegels – Simulation und Experiment

Ein Papierkegel wird aus ca. 8.5 m Höhe im Treppenhaus der Schule fallen gelassen. Sollte sich innerhalb dieser Fallhöhe schon eine Endgeschwindigkeit einstellen, dann sollten wir mit dem Ultraschallmesswandler den Nachweis führen können.

Ansatz für den Gleichgewichtszustand bzw. für die Berechnung der Endgeschwindigkeit:

$$\text{(Beschleunigungskraft)} \quad F_G = F_L \quad \text{(Luftwiderstandskraft)}$$

$$\Leftrightarrow m \cdot g = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho_L \cdot A \cdot v^2$$

$$\Leftrightarrow v^2 = \frac{2 \cdot m \cdot g}{c_w \cdot \rho_L \cdot A}$$

Werte der Konstanten:

$$c_w = 0.75$$

$$m = 57 \text{ g} = 0.057 \text{ kg}$$

$$\rho_L = 1.293 \frac{\text{g}}{\text{dm}^3} = 1.293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$A = \pi \cdot \frac{d^2}{4} = \pi \cdot \frac{(0.335 \text{ m})^2}{4}$$

Literaturangabe für einen Kegel mit Öffnungswinkel 90°

Masse des Kegels

Dichte der Luft

Querschnittsfläche bei 33.5 cm Durchmesser des Kegels

Nach Einsetzen und Wurzelziehen erhält man $v_{end} = 3.62 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ohne Luftwiderstand wäre diese Geschwindigkeit schon nach $s_0 = \frac{v_{end}^2}{2 \cdot g} = 0.67 \text{ m}$ erreicht, so

dass guter Grund zu der Annahme besteht, dass der Kegel seine Endgeschwindigkeit nach dem ggfs. drei- oder vierfachen dieser Strecke, jedenfalls deutlich innerhalb der Fallstrecke von ca. 8m erreicht.

Literaturwerte:

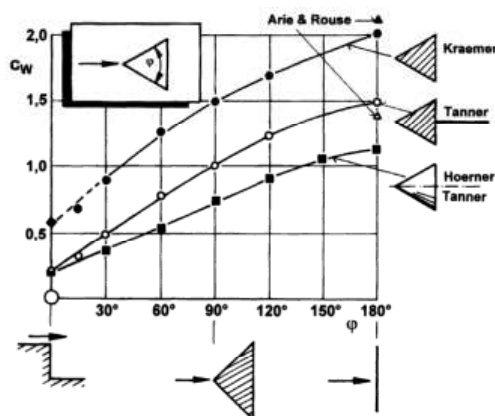


Bild 3.40: c_w -Wert von Keil und Kegel; nach Arie & Rouse, (1956), Kraemer (1964), Hoerner (1965) und Tanner (1967). Die c_w -Werte des Kegels nach Messungen von Hoerner und Tanner sind deckungsgleich.

Zum Kegel gehört der untere Graph.

Quelle: <http://books.google.de/books?id=TbAzCH1zCG4C&pg=PA128&lpg=PA128&dq=cwWert+des+Kegels>

Interessiert man sich nicht nur für die Endgeschwindigkeit, sondern auch für Zwischenwerte, so kann man zum einen versuchen, mit einem Mess-System wie z.B. dem Ultraschall-Messwandler eine Orts-Zeit-Kurve aufzunehmen. Eine zweite Möglichkeit besteht in der Simulation des Vorgangs mit einem kleinen Computer-Programm.

Das mathematische Problem einer theoretischen Beschreibung ergibt sich daraus, dass sich die Beschleunigung aufgrund des Luftreibungsanteils kontinuierlich ändert, weil sich die Geschwindigkeit (anfangs) kontinuierlich ändert. Alle unsere bisherigen Gleichungen taugen aber nur für die Beschreibung von Bewegungen mit konstanter Beschleunigung.

In der Physik wird in solchen Fällen ein Standard-Näherungsverfahren angewendet. Man arbeitet mit der (eigentlich falschen) Annahme, dass in einem ganz kleinen Intervall, zumeist ein Zeitintervall, bestimmte Größen konstant bleiben und kann dann die bekannten Gleichungen benutzen. Anschließend addiert man alle die winzig kleinen Bewegungen bzw. Veränderungen auf und erhält so die Gesamtbewegung bzw. die Gesamtveränderung. Je kleiner man die Basiseinheit wählt, desto genauer wird das Näherungsverfahren.

Im vorliegenden Fall betrachten wir eine (kleine) Zeiteinheit Δt . Der Kegel tritt in dieses Zeitintervall mit der Geschwindigkeit v_{alt} am Ort s_{alt} ein. Am Ende des Zeitintervalls besitzt der Kegel die Geschwindigkeit $v_{neu} = v_{alt} + \Delta v$ und befindet sich am Ort $s_{neu} = s_{alt} + \Delta s$. Unsere (falsche) Annahme ist, dass die Gleitreibungskraft innerhalb dieser Zeiteinheit konstant bleibt.

Unter dieser Annahme gilt dann nämlich die Gleichung $v_{neu} = v_{alt} + \Delta v = v_{alt} + a \cdot \Delta t$.

Die Beschleunigung in Δt ist nun ebenfalls konstant und kann angegeben werden, nämlich

$$a = g - \frac{F_L}{m} = g - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{c_w \cdot \rho_L \cdot A}{m}}_C \cdot v_{alt}^2 = g - C \cdot v_{alt}^2 \quad (C \text{ ist eine Konstante!})$$

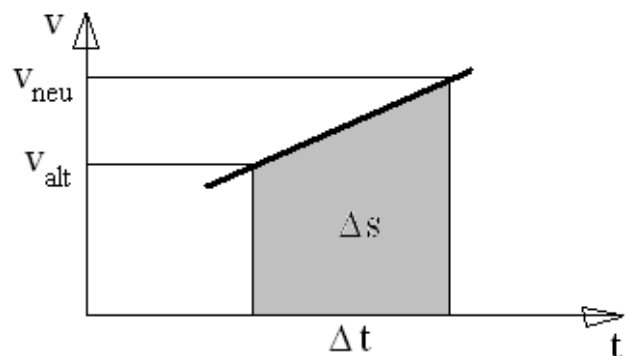
Nach Annahme ist die Beschleunigung a in Δt konstant. Dann aber hat die Geschwindigkeit v in Δt einen linearen Verlauf, vgl. Abbildung.

Die Fläche unter dem $v-t$ -Graphen entspricht genau dem Wegzuwachs Δs in der Zeit Δt .

Die Trapezfläche berechnet sich zu

$$\Delta s = \frac{1}{2} \cdot \Delta t \cdot (v_{alt} + v_{neu})$$

Damit sind nun v_{neu} und s_{neu} beide bekannt und können als Eingangsdaten für das nächste Zeitintervall Δt benutzt werden usw.



Diese Berechnungen werden nun in einer Schleife in einem Computer-Programm bis zu einer definierten Abbruchbedingung ständig wiederholt.

Es folgt der gesamte Quelltext von MuPAD incl. der Ausgabediagramme.

Freier Fall eines Papier-Kegels Luftwiderstand proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit

Konstanten des Experiments:

- `g_Ort:=9.81;; // Ortsfaktor der Beschleunigung`
`ro:=1.293;; // Dichte der Luft in kg/m³`
`cw:=0.75;; // Luftwiderstandsbeiwert eines offenen Kegels`
`d:=0.335;; // Durchmesser des Trichters in m`
`A:=PI*d^2/4;; // Querschnittsfläche in m²`
`m:=0.057;; // Masse des Kegels in kg`
`C:=float(0.5*cw*ro*A/m);; // Konstante für die Berechnung der Beschleunigung`

- `v_Theorie:=float(sqrt(2*m*g_Ort/(cw*ro*A)));`
`// theoretische Endgeschwindigkeit in m/s:`

3.62

- `Fall:=proc(h,dt) // Hier beginnt eine sog. Prozedur`
`local a,i;`
`begin`
`s[0]:=0;v[0]:=0;t[0]:=0; // Startwerte`
`i:=0;`

```
repeat
  a:=float(g_Ort-C*v[i]^2); // s. Text oben
  v[i+1]:=v[i]+a*dt;
  s[i+1]:=s[i]+0.5*dt*(v[i]+v[i+1]);
  t[i+1]:=t[i]+dt;
  i:=i+1;
until s[i]>h end_repeat;
```

```
max_i:=i;max_v:=v[max_i];max_t:=t[i]
end_proc: // Ende der Prozedur
```

- `delta_t:=0.050;; // Dauer einer Zeiteinheit in s`
`h0:=10;; // Fallhöhe`
`Fall(h0,delta_t);; // Aufruf der Prozedur`
- `max_i,max_v,v_Theorie;`
`// Anzahl der Durchläufe, v(Simulation), v(Theorie)`

61, 3.62, 3.62

- `f1:=x-->sqrt(2*g_Ort*x); // v-s-Kurve ohne Luftwiderstand`
`Gf1:=plot::Function2d(f1,x=0..h0);;`

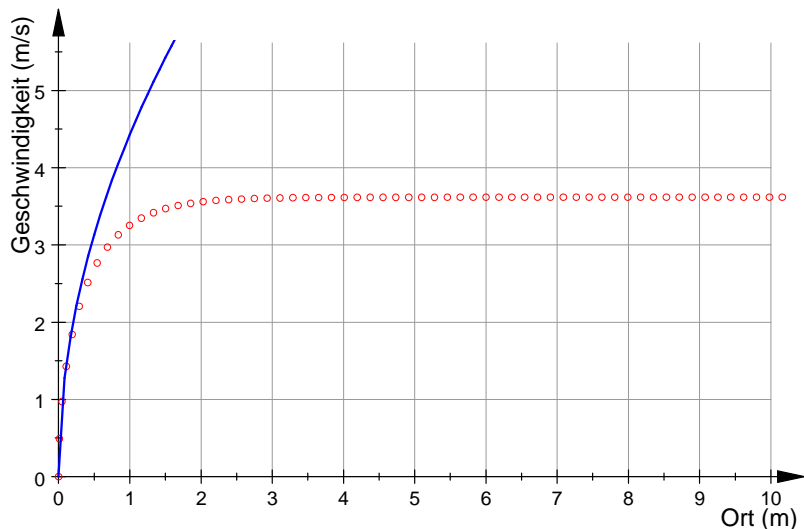
$$x \rightarrow \sqrt{19.6 \cdot x}$$

Der Ausgabertext für das s-v-Diagramm:

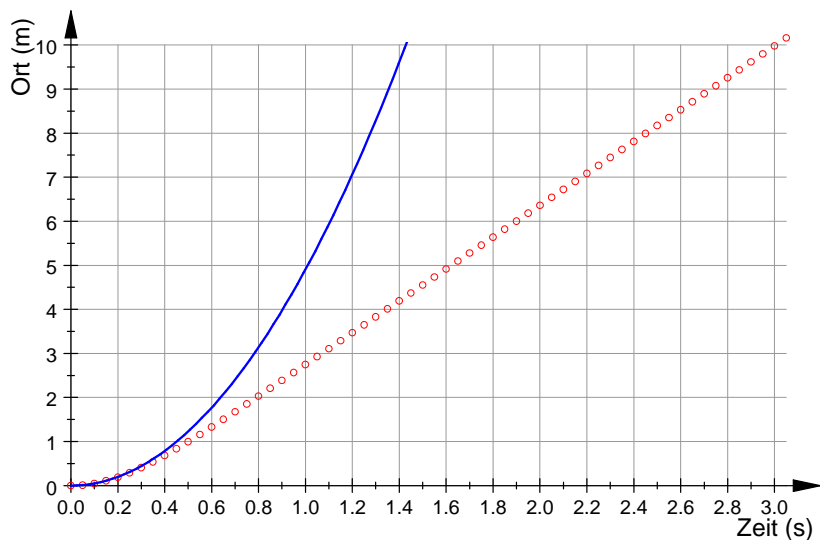
- `OrtGeschw:= plot::Point2d([s[i],v[i]],`
`PointSize=1,`
`PointStyle=Circles,`
`Color=RGB::Red`
`) $ i=0..max_i;`
- ```
plot(OrtGeschw,Gf1,
 AxesTitles = ["Ort (m)", "Geschwindigkeit (m/s)"],
 YAxisTitleOrientation = Vertical,
 GridVisible = TRUE,
 ViewingBox = [0..h0, 0..max_v+2]);
```

Anmerkung:  
Statt der Indizes „alt“ und „neu“ werden hier für die Geschwindigkeit und den Ort Listen benutzt, so dass man anschließend auf jeden einzelnen Zwischenzustand zugreifen kann. Zusätzlich wird die zugehörige Zeit in eine Liste eingetragen.

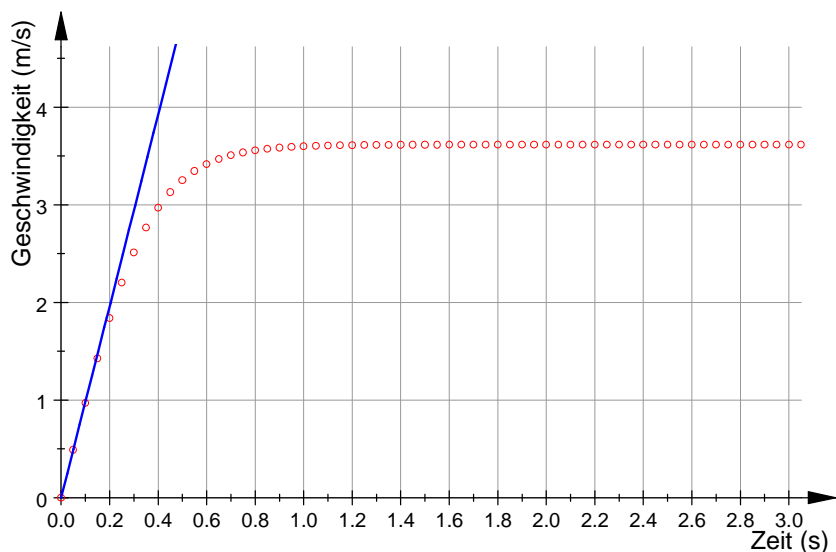
Die Diagramme (auf die übrigen Ausgabertexte wird verzichtet):



Der durchgezogene Graph gibt den Kurvenverlauf ohne Luftwiderstand an.



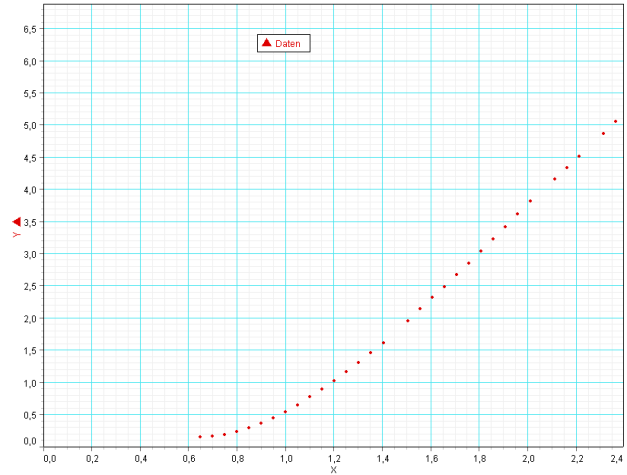
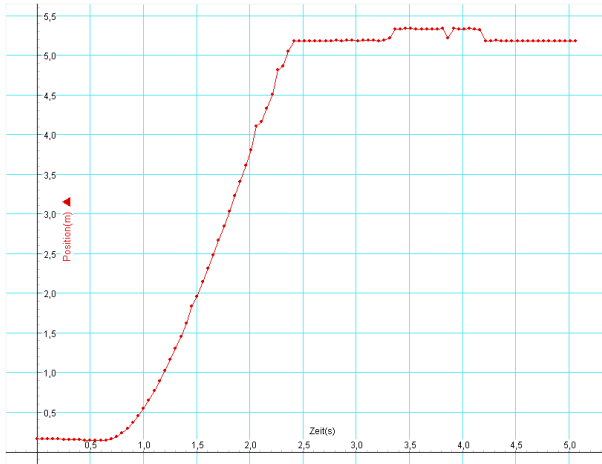
So sollte auch der Ultraschall-Messwandler die Bewegung aufzeichnen!



Der durchgezogene Graph gibt den Kurvenverlauf ohne Luftwiderstand an.

Die Daten der Messwerterfassung:

Die Abbildung links zeigt die Originalmessung. Das Treppenhaus ist zwar ca. 8m hoch, jedoch wird kein Signal mehr vom Kegel empfangen, wenn er tiefer als ca. 5m gefallen ist. Offensichtlich wird das Ultraschallsignal dann vom Rand der Zwischengeschoßdecke reflektiert. Man kann den Öffnungswinkel des Ultraschallsignals leider nicht verkleinern und ohne ein aufwändiges Gerüst den Sender auch nicht weiter in die Mitte der Treppenhausdecke platzieren. Im rechten Diagramm sind alle nicht zur Fallbewegung gehörenden Punkte entfernt worden, zusätzlich noch „unschöne“ Messpunkte.



```
• UrL := import::readdata(NOTEBOOKPATH."Fall3.csv", ";");
 n:=nops(UrL);
```

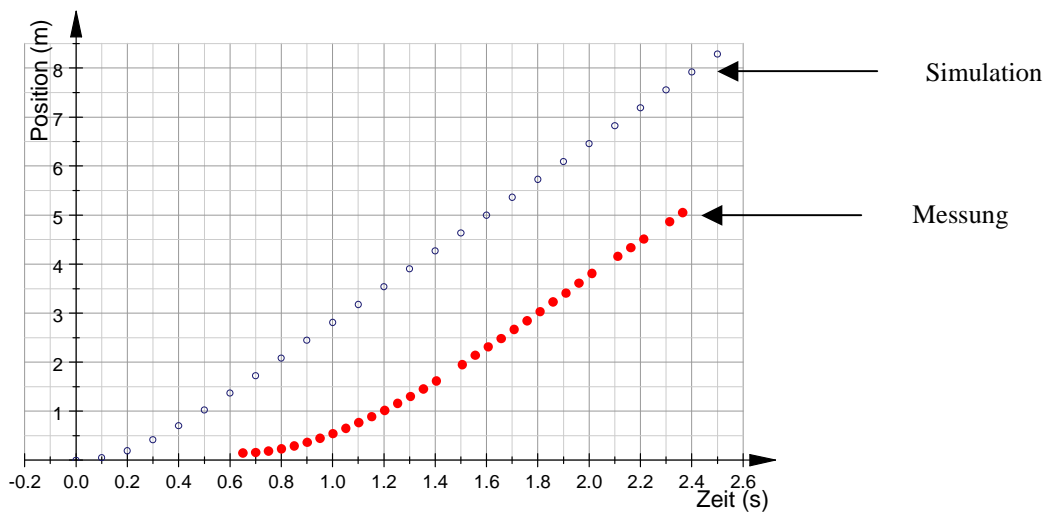
```
[[0.6504, 0.144], [0.7005, 0.156], [0.7505, 0.185], [0.8007, 0.23],
 [0.8508, 0.29], [0.9011, 0.363], [0.9513, 0.445], [1.0016, 0.54],
 [1.0519, 0.647], [1.1022, 0.767], [1.1526, 0.888], [1.203, 1.016],
 [1.2534, 1.157], [1.3038, 1.299], [1.3542, 1.451], [1.4047, 1.614],
 [1.5057, 1.95], [1.5562, 2.139], [1.6067, 2.312], [1.6572, 2.48],
 [1.7078, 2.666], [1.7583, 2.844], [1.8088, 3.03], [1.8594, 3.227],
 [1.9099, 3.408], [1.9605, 3.612], [2.0111, 3.808], [2.1121, 4.157],
 [2.1626, 4.333], [2.2131, 4.51], [2.3141, 4.866], [2.3647, 5.05]]
```

32

Trennen der Messpaare:

```
• tM:=[UrL[i][1] $ i=1..n];
 sM:=[UrL[i][2] $ i=1..n];
```

Diagramm:



Die Messkurve geht ab etwa dem 20. Punkt in eine Gerade über. Wir bestimmen ab diesem Punkt eine Regressionsgerade. Ihre Steigung entspricht der Endgeschwindigkeit des Kegels.

- `k:=round(0.6*n):k,n; // Auswahl der Punkte für die Regression`  
`R:=stats::linReg([[tM[i],sM[i]] $ i=k..n]);`  
`m:=op(op(R,1),2); // Steigung = Endgeschwindigkeit !!!`  
`b:=op(op(R,1),1):; // Verschiebung in y-Richtung`  
`max_v,v_Theorie; // zum Vergleich (Simulation/Theorie)`  
`abs(100*(1-(m/max_v))); // prozentuale Abweichung`

19, 32

← Auswahl der Punkte von Nr. ... bis Nr. ...

`[[- 3.5408, 3.6389], 0.0023544]`

← Regressionsausgabe

3.6389

← Steigung der Regressionsgeraden = Endgeschwindigkeit in m/s

3.6487, 3.6487

← Die Endgeschw. aus Simulation und Theorie

0.27053

← Prozentuale Abweichung

- `v_V1:=3.7593;prozAbw1:=3.0286;`  
`v_V2:=3.5311;prozAbw2:=3.2256;`  
`v_V3:=3.6389;prozAbw3:=0.27053;`

} Die Endgeschwindigkeiten und prozentualen Abweichungen vom Theoriewert aus drei Messungen.

- `vq:=(v_V1+v_V2+v_V3)/3;`  
`vq,v_Theorie;`  
`abs(100*(1-(vq/max_v))); // prozentuale Abweichung`  

3.6431, 3.6487      0.15479

Im letzten Befehlspunkt wird der Mittelwert ( $v_q$ ) der Endgeschwindigkeiten aus allen drei Messungen gebildet, außerdem die Abweichung des Mittelwertes vom Theoriewert. Die unglaublich gute Übereinstimmung ist natürlich ein bisschen Zufall. Denn:

1. sind die Abweichungen untereinander deutlich größer ( $v_{V1}$  zu  $v_{V2} \hat{=} 6.5\%$ ),
2. können wir immer noch nicht sicher sein, ob der aus der Literatur übernommene Wert

$c_w = 0.75$  für einen Kegel mit  $90^\circ$  – Öffnung auch passend für unseren Kegel mit Styropor-verstärkter Spitze ist. Es müssten mehr Messversuche durchgeführt werden, am besten auch über eine noch etwas längere Fallstrecke.

