Gefäße mit unterschiedlichen Formen werden mit einer variablen, aber konstanten Wasserzufuhr befüllt. Es soll jeweils die Funktion *Zeit* $\to$ *Pegelhöhe* ermittelt werden.

Von einfachen Formen zu geschwungenen Vasenformen steigt der mathematische Aufwand rapide an und es kann nur noch mit einem Mathematikprogramm gearbeitet werden, wobei das Programm GeoGebra zum Einsatz kommen wird. An einer konkreten Vase werden die Profil-Funktion und die Zielfunktion experimentell ermittelt.

Vorbereitungen

Zwei einfache Beispiele sollen auf das Thema einstimmen:

1. Zylinderförmige Vase:
   Das Volumen Wasser in der Vase kann einmal als Funktion der Pegelhöhe *h*, zum anderen als Funktion der Zeit *t*, die das Wasser eingelaufen ist, dargestllt werden: $V(h) = G \cdot h = \pi \cdot r_0^2 \cdot h$ und $V(t) = a \cdot t$. Dabei ist *a* die Zuflussmenge in Liter pro Minute, z.B. $a = 1.2 \, \frac{l}{\min} = 1.2 \, \frac{dm^3}{\min}$.
   Die Funktion $h(t)$ erhält man aus dem Ansatz $V(h) = V(t)$, also

   $$\pi \cdot r_0^2 \cdot h = a \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad h(t) = \frac{a}{\pi \cdot r_0^2} \cdot t$$. Dies ist ein linearer Zusammenhang (Ursprungsgerade).

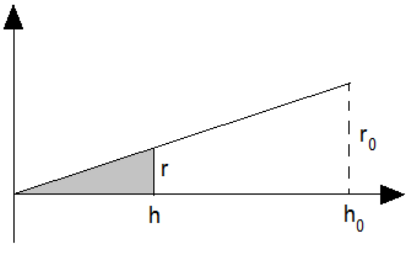
   Nichts anderes hat man erwartet: In der zylinderförmigen Vase steigt der Wasserpegel gleichmäßig an.

2. Kegelförmige Vase:
   Gleiches Verfahren, allerdings ändert sich jetzt die Grundfläche mit der Höhe:

   $$V(h) = V(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} \cdot G(h) \cdot h = a \cdot t$$

   $$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{r_0}{h_0} \cdot h\right)^2 \cdot h = a \cdot t \qquad \left(\frac{r}{h} = \frac{r_0}{h_0}\right)$$

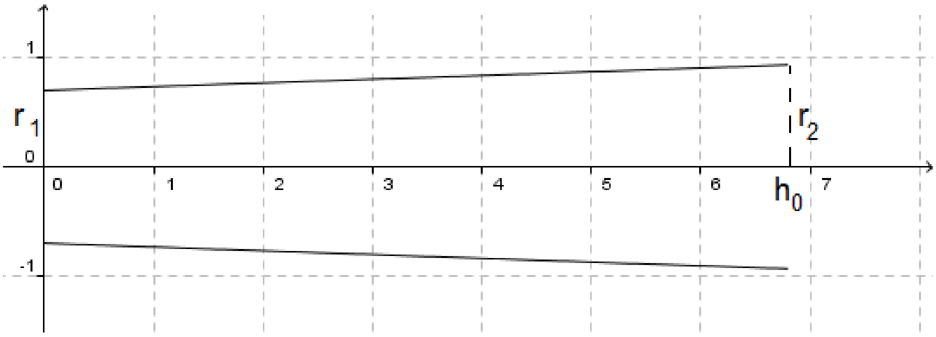
   $$\Leftrightarrow \quad h^3 = \frac{3a \cdot h_0^2}{r_0^2} \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad h(t) = \sqrt[3]{\frac{3a \cdot h_0^2}{r_0^2}} \cdot \sqrt[3]{t}$$

   Die Pegelhöhe wächst mit der dritten Wurzel aus der Zeit.

Eigentliches Projekt

Vase Nr. 1: Die Form der Vase ist ein Kegelstumpf. Skizze um 90 Grad gedreht:



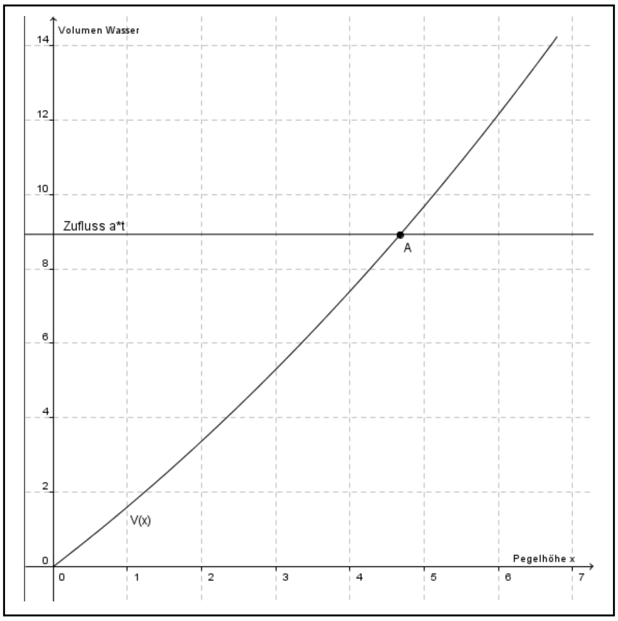
Maße in dm

Als Randfunktion bezeichnen wir die (obere) Querschnittslinie, in diesemFall eine Gerade mit der Gleichung $r(h) = \underbrace{\frac{r_2 - r_1}{h_0 - 0}}_{Steigung} \cdot h + r_1$.

Die Bestimmung des Volumens *V(h)* könnte man mit Hilfe der Formel für das Volumen des Kegelstumpfs vornehmen. Mit Blick auf Vase 2 wird aber ein anderes Verfahren gewählt.
Wir lassen uns das Volumen von GeoGebra mit einem vorgefertigten Befehl ausrechnen. Dabei müssen wir den Variablennamen *h* gegen *x* austauschen, weil GeoGebra nur *x* als Funktionsvariable kennt: $V(x) = \pi \cdot Integral(r^2(x))$
Man erhält mit $r_1 = 0.698, r_2 = 0.93, h_0 = 6.79$ die Funktion $r(x) = 0.0342 \cdot x + 0.698$
und daraus $V(x) = \pi \cdot (0.000389 \cdot x^3 + 0.0238 \cdot x^2 + 0.487 \cdot x)$.
(Bzgl. der experimentellen Bestimmung der Innenmaße r_1, r_2, h_0 s. Anlage.)

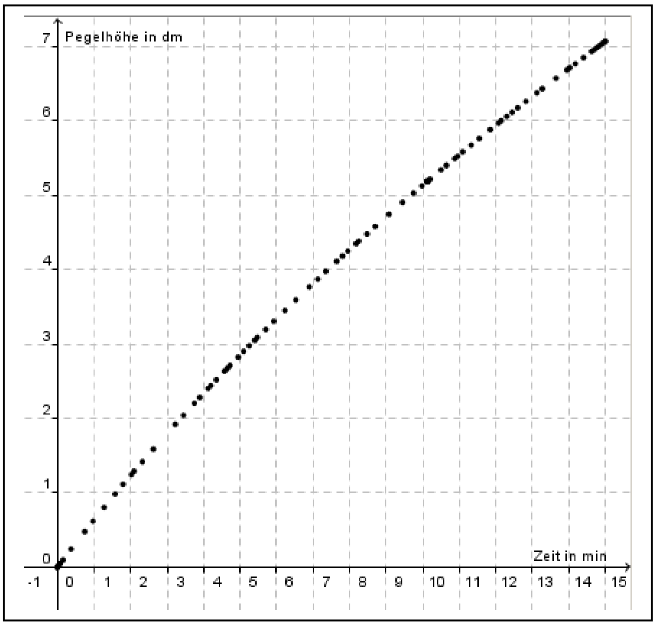
Die Gleichung $V(x) = V(t) \quad (x \mathrel{\hat{=}} h)$ muss nun nach *x* freigestellt werden. Algebraisch müßte dazu eine Gleichung 3. Grades gelöst werden, was für uns nicht möglich ist. (Es gibt nichts Entsprechendes zur *p*-*q*-Formel für Gleichungen 3. Grades.) Deshalb lösen wir die Gleichung rechnerisch mit Geogebra.

Dazu interpretieren wir die Gleichung $V(x) = a \cdot t$ als Schnittpunkt zweier Funktionen. Dabei ist $a \cdot t$ bezogen auf die Lösungsvariable *x* eine konstante Funktion, also eine Parallele zur x-Achse. Sie wird in GeoGebra definiert als $Z(x) = a \cdot t$.
Das nebenstehende Diagramm zeigt die Funktionen für $a = 1\frac{l}{min}$ und $t = 8.9\,s$:
Der Punkt A wird von GeoGebra berechnet.
Er hat die Koordinaten $A(Pegelhöhe\, x | a \cdot t)$.
Die Zeit t wir als unabhängige Variable (in GeoGebra ein Schieberegeler) definiert.
Lässt man nun per Animation des Schieberglers die Zeit t gleichmäßig wachsen, so läuft der Punkt A dabei über den Volumen-Grafen. Die x-Koordinate von A gibt dabei die jeweilige Pegelhöhe in der Vase an.



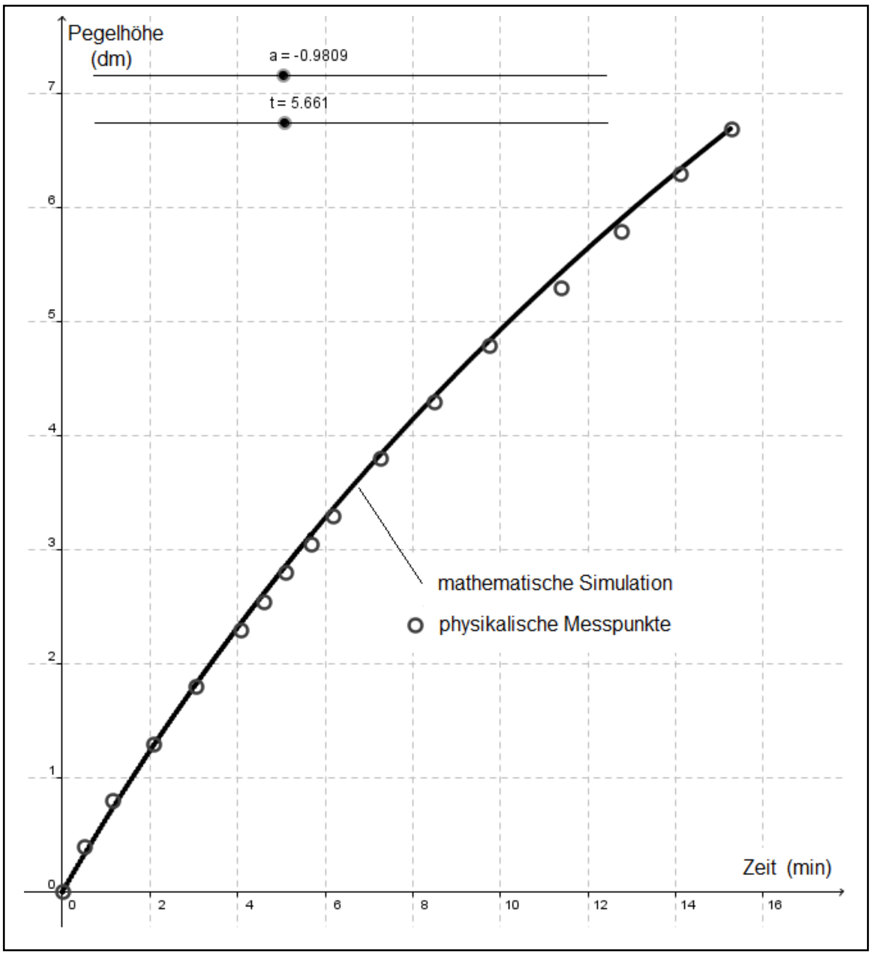
Die Koordinaten eines Punktes kann man sich in GeoGebra mit den Befehlen *x(A)* und *y(A)* ausgeben lassen. Damit ist das Problem im Prinzip gelöst. Es wird jetzt in einem neuen *t*-*x*-Diagramm ein Punkt *PH* (Pegelhöhe) definiert, und zwar
$PH = (t \,|\, x(A))$.
Wenn man nun den Schieberegler *t* wieder animiert und die Spur von Punkt *PH* anzeigen lässt, so erhält man den *Grafen* der Zielfunktion $x(t)$ bzw. $h(t)$.

Man kennt allerdings nicht die Gleichung der Funktion.



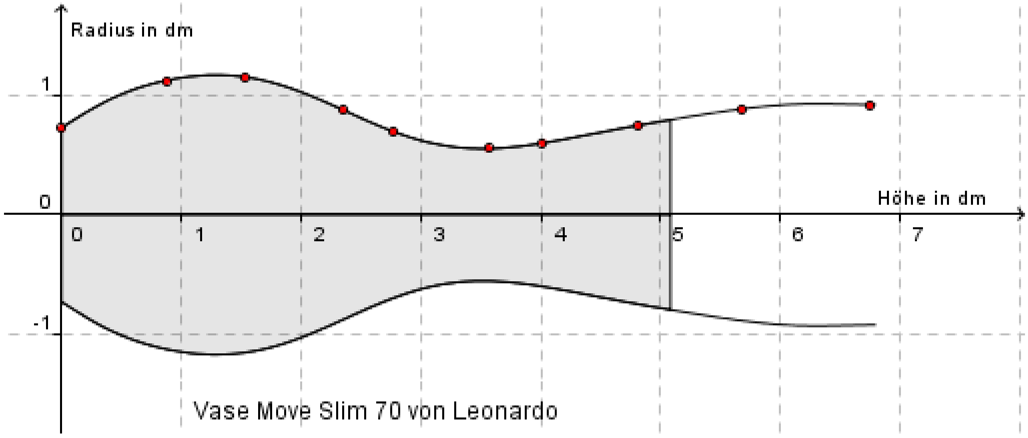
Im letzten Schritt wird die mathematische Simulation mit der Realität, also mit physikalischen Messdaten, verglichen. Dazu wird die reale Vase mit einem gleichmäßigen Wasserstrom aus dem Wasserhahn befüllt und die Zeit sowie die zugehörige Pegelhöhe gemessen. Die Messpunkte werden in GeoGebra in eine Tabelle eingetragen und als Punkte im Geometrie-Fenster dargestellt. Dies sind die offenen Punkte im nebenstehenden Diagramm.

Leider zeigte sich, dass der Wasserzustrom nicht konstant war. Der Wert sank während der Befüllung von $a = 1.019\ l/min$ auf $a = 0.916\ l/min$.
Dementsprechend liegen die Messpunkte leider nicht auf der theoretischen Kurve. (Diagramme s. Anhang).



In GeoGebra kann nun aber mit einer zulässigen Manipulation nachgearbeitet werden. Unter der Annahme, dass das Absinken der Zuflussmenge gleichmäßig über die Zeit erfolgt, konstruieren wir einen Regler *a* in den Grenzen 1.019 und 0.916, der gleichzeitig mit dem Regler *t* animiert wird. Nun nimmt die Zuflussmenge mit der Zeit gleichmäßig ab. Das Diagramm zeigt die so erhaltene theoretische Kurve, die mit guter Genauigkeit durch die Messpunkte verläuft.

Vase Nr. 2. Unregelmäßige Randkurve

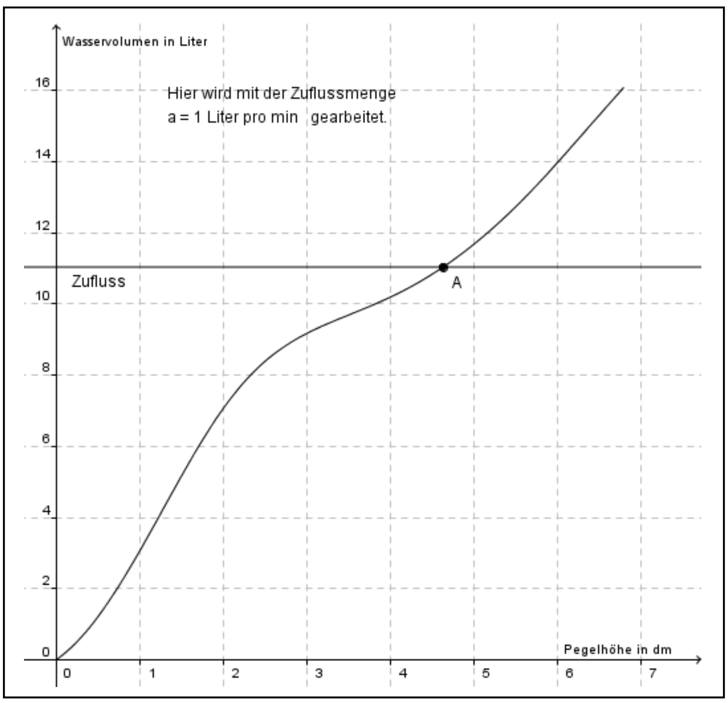


Wir gehen genauso vor wie bei der ersten Vase und kopieren dazu die GeoGebra-Datei der Vase Nr. 1. Dann brauchen wir lediglich die Randfunktion zu ersetzen *und sind fertig* !

Allerdings ist die Bestimmung der Randfunktion etwas aufwendig. Man erhält sie näherungsweise aus zeitraubenden Messungen an der Vase, mehr dazu im Anhang. Alle so bestimmten Randpunkte der Vase werden in die GeoGebra-Tabelle geschrieben, markiert und mit RTM eine Liste dieser Punkte erzeugt, der Name sei z.B. L1. Gleichzeitig werden die Punkte im Geometrie-Fenster gezeichnet. Im Beispiel sind es 10 Punkte, (s.o). Dann wird mit dem vorgefertigten GeoGebra-Befehl r(x)=TrendPoly[L1,n] ein Polynom vom Grad n durch die 10 Punkt erzeugt. Der maximale Wert von n ist 9, da ein Polynom vom Grad 9 durch 10 Koeffizienten definiert wird und dafür 10 Gleichungen, gewonnen aus 10 Punkten, notwendig sind.
Im vorliegenden Fall liefert leider keiner der Werte n= 4 bis 9 eine zufriedenstellende Randkurve. Deshalb setzen wir eine Menge von z.B 12 Punkten in das Geometrie-Fenster, ihre Namen seien z:B. L,M,N, usw. Dann definieren wir eine neue Liste L2={L,M,N, …} und bilden nun r(x)=TrendPoly[L2,11] (evtl. auch r(x)=TrendPoly[L2,n] mit n<11) und platzieren die neuen Punkte derart, dass die Kurve f durch alle Vasenkurve verläuft und die Form der Vase dem Augenschein nach „schön“ widergibt. Dabei kam in der Aktionswoche die obige Form heraus mit der Randfunktion

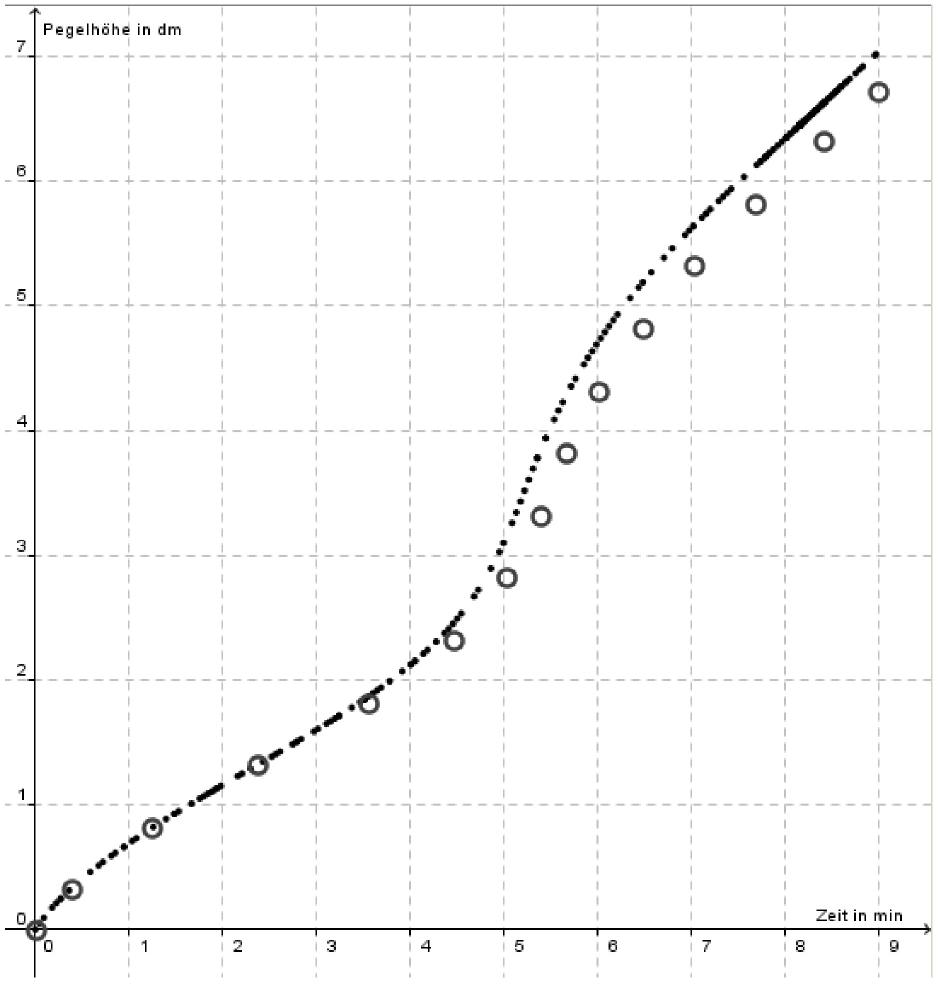
$$r(x) = 0.000005 \cdot x^{11} + 0.0002 \cdot x^{10} - 0.0034 \cdot x^{9} + 0.03235 \cdot x^{8} - 0.18756 \cdot x^{7} + 0.67943 \cdot x^{6}$$
$$- 1.5237 \cdot x^{5} + 2.055 \cdot x^{4} - 1.57155 \cdot x^{3} + 0.33303 \cdot x^{2} + 0.60318 \cdot x + 0.72515$$

Wieder wird das Volumen mit dem Geogebra-Befehl $V(x) = \pi \cdot Integral(r^2(x))$ gebildet. Man erhält diesmal eine Funktion vom Grad 23 (!), auf deren Widergabe hier verzichtet wird. Und auch hier wird der Graf mit der Waagerechten $Z(x) = a \cdot t$ geschnitten:



Die Vase wird wieder aus dem Wasserhahn befüllt. Die Zuflussmenge beträgt nun 1 *Liter* in 32.3 *Sekunden*. Dieser Wert stellt einen Mittelwert aus sechs Messungen dar. Die Vase wurde in ca. 9 *min* gefüllt und die Zuflussmenge blieb relativ konstant ohne Tendenz.

Berechnung: $a = \frac{1l}{32.3s} = \frac{1\,l}{\frac{32.3}{60}\,min} = \frac{60}{32.3}\frac{l}{min} = 1.86\frac{l}{min}$

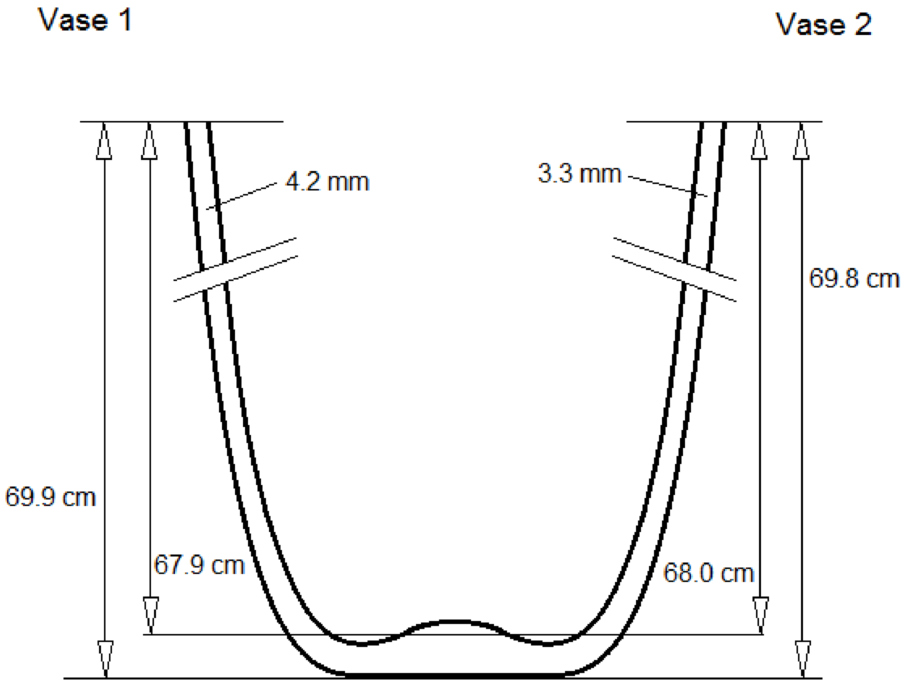


Die offenen Punkte entsprechen wieder den gemessenen Zeiten und Pegelhöhen.
Leider erhalten wir ab ca. ein Drittel der Höhe eine Abweichung. Die gemessenen Pegelhöhen sind kleiner als die theoretisch vorausgesagten. Eine mögliche Ursache sind ungenaue Messungen der Vasendurchmesser und möglicherweise nicht gleichmäßige Wanddicken der Vase. Eine überzeugende Erklärung steht aus.

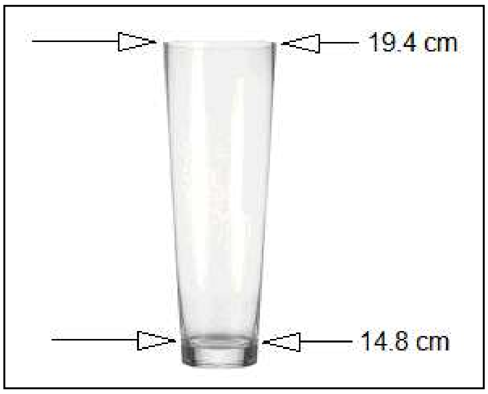
Anhang

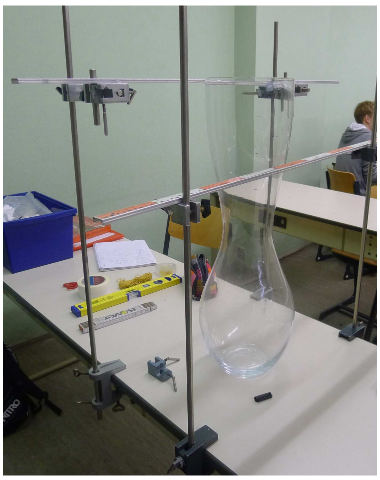
I. Ausmessen der Vasen

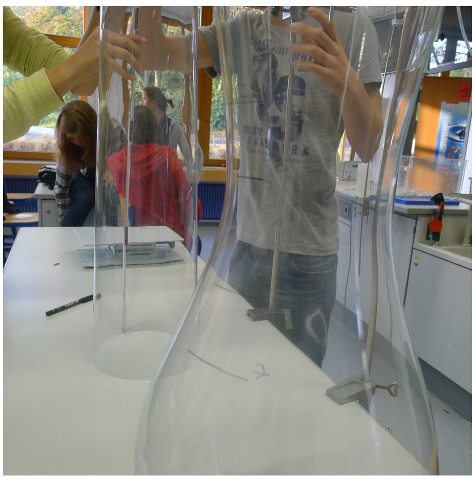
Beide Vasen haben in der Bodenmitte eine Erhebung. Der Unterschied zwischen Maximum in der Mitte und dem Minimum am Rand beträgt 2 mm bei Vase 1 und 4 mm bei Vase 2. Für die Festlegung der Innenhöhen der Vasen wurde ein Durchschnittsniveau angenommen, s. Skizze.
Man erhält so eine Bodendicke von 2.0 cm bei Vase 1 und 1.8 cm bei Vase 2.



Die Querschnittslinie von Vase 1 ist eine Gerade. Deshalb kann man sich hier auf die Messung zweier (Außen-) Durchmesser beschränken, und zwar am oberen Rand und 2 cm oberhalb der Standfläche, dort liegt die null der inneren Höhenskala.
Nach Halbierung der Durchmesserwerte und Abzug der Wandstärke erhält man die Innenradien, mit deren Hilfe die Randfunktion der Vase aufgestellt werden kann (s.o., nach Drehung um 90 Grad).
Für die Messung der Durchmesser wurde eigens ein Gestell aufgebaut, wie die Fotos zeigen.







Die Tabelle zeigt die Messungen an Vase 2.

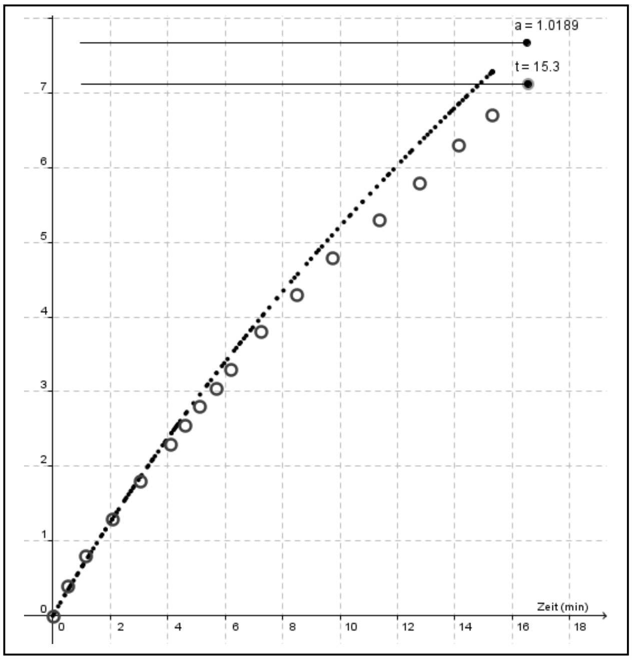
Außendurchmesser (cm)	Höhe (cm) bezogen auf Standfläche
18.9	69.25
18.2	58.55
15.5	49.95
12.6	41.95
11.7	37.45
14.5	29.5
18.1	25.3
23.5	17.1
22.9	10.55
15.0	1.8

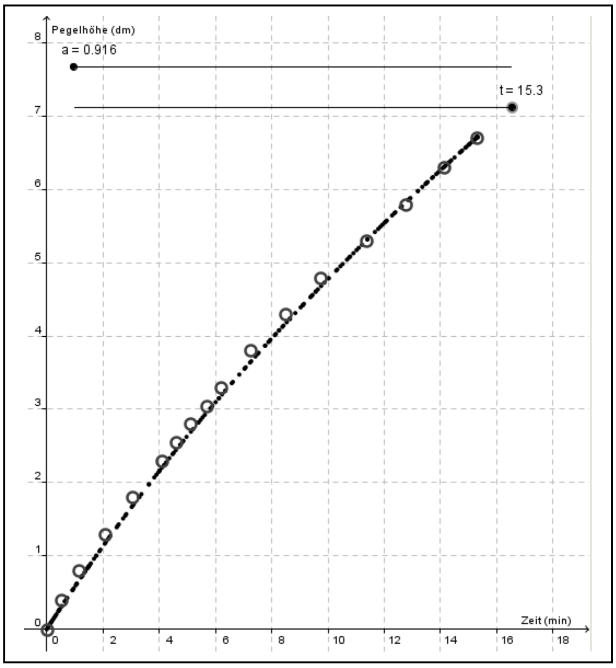
Die Werte werden in der Tabellen-Ansicht von GeoGebra eingetragen und mit den üblichen Mitteln der Tabellenkalkulation auf die Innenmaße der Vase umgerechnet. D.h. die Höhenwerte werden um 1.8 cm verkleinert und durch 10 dividiert (auf die Einheit dm).
Die Durchmesserwerte werden halbiert, die Wanddicke abgezogen und ebenfalls durch 10 geteilt auf die Einheit dm.
Die beiden Spalten werden dann als Punkte in das Geometrie-Fenster von GeoGebra eingetragen und ergeben das Innenprofil der Vase (s.o.).

II. Auswertungen

Vase 1

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Mißerfolg bei Vase 1, wenn man für die gesamte Befüllungszeit mit der anfänglichen Zuflussmenge von $a = 1.089 \frac{l}{min}$ …



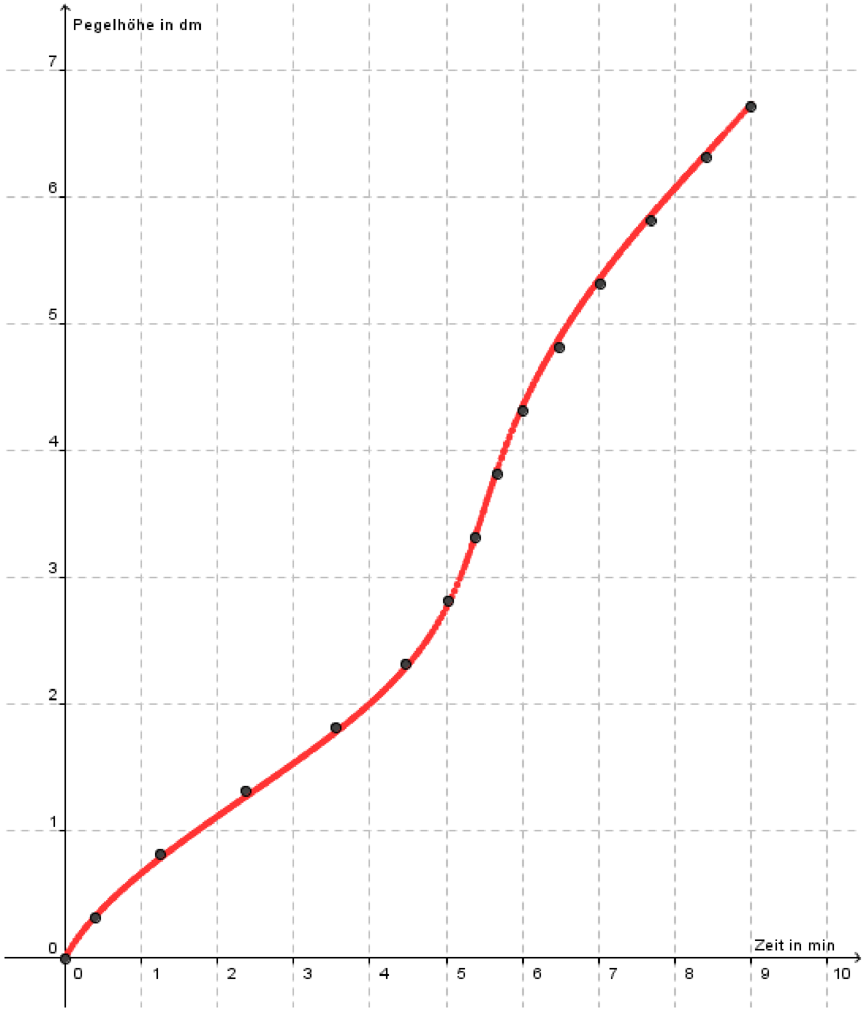


… bzw. mit der Zuflussmenge am Ende der Befüllung $a = 0.916 \frac{l}{min}$ arbeitet.

Mit keinem der beiden Werte erhält man eine zufriedenstellende Übereinstimmung.

Vase 2

Man würde eine wunderschöne Übereinstimmung mit einem etwas kleineren Wert für die Zuflussmenge erhalten:



Für $a = 1.77 \frac{l}{min}$ statt $a = 1.86 \frac{l}{min}$ passt die Kurve nahezu perfekt, aber das wäre nun wirklich gepfuscht.

Denn $a = 1.77 \frac{l}{min}$ bedeutet $a = \dfrac{1\ l}{60/1.77\ s} = \dfrac{1\ l}{33.9\ s}$. Und die Abweichung zwischen $32.3\ s$ (gemessen) und $33.9\ s$ (erwünscht) liegt auf keinen Fall im Rahmen der Messungenauigkeit der Zeit.