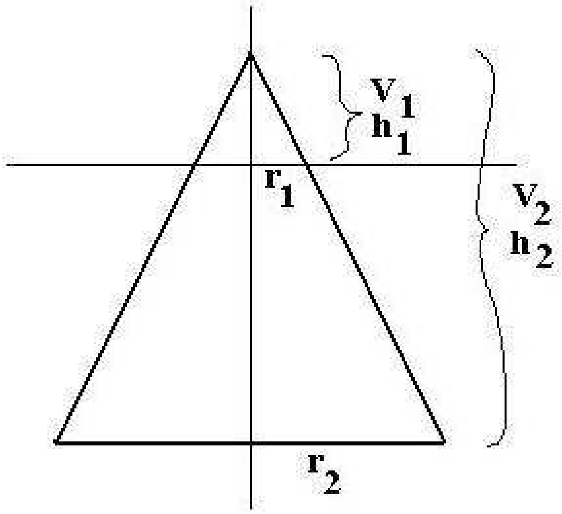
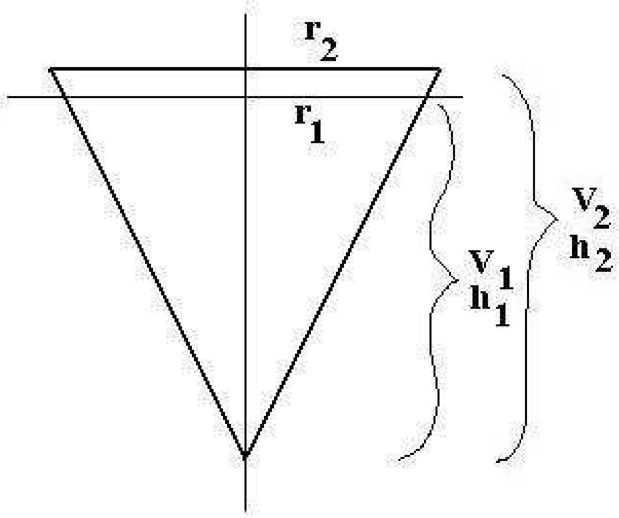
**Wie tief taucht ein Holzkegel in Wasser ein ?** **( Jgst. 10 )**

Wir nehmen an, der Kegel sei aus einer Holzsorte, welche in Wasser schwimmt. Grundsätzlich soll er "aufrecht" schwimmen, was auf zwei Arten möglich ist, s. Skizze. Zur Stabilität der Schwimmlage: Notfalls wird der Kegel gestützt.




Das Auftriebsgesetzt nach Archimedes lautet für die Schwimmlage:

> Die Masse des von dem schwimmenden Körper verdrängten Wassers ist genau so groß wie die Masse des Körpers.

Die Masse hängt mit dem Volumen über die allgemeine Gleichung $m = \rho \cdot V$ zusammen ( $\rho$ ist die Dichte des Körpers). Dann erhält man mit den hier benutzten Bezeichnungen die Gleichungen

(linke Figur)

$$\rho_{Wasser} \cdot (V_2 - V_1) = \rho_{Holz} \cdot V_2$$

Ziel ist, etwas über $h_1$ herauszubekommen, welches in $V_1$ versteckt ist. Also wird nach $V_1$ freigestellt:

$$\rho_W \cdot V_2 - \rho_H \cdot V_2 = \rho_W \cdot V_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\rho_W - \rho_H}{\rho_W} \cdot V_2 = V_1$$

Erst jetzt werden Formeln benutzt:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\rho_W - \rho_H}{\rho_W} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_2^{\,2} \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_1^{\,2} \cdot h_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\rho_W - \rho_H}{\rho_W} \cdot r_2^{\,2} \cdot h_2 = r_1^{\,2} \cdot h_1$$

(rechte Figur)

$$\rho_{Wasser} \cdot V_1 = \rho_{Holz} \cdot V_2$$

Hier können sofort Formeln eingesetzt werden:

$$\Leftrightarrow \quad \rho_W \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_1^{\,2} \cdot h_1 = \rho_H \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_2^{\,2} \cdot h_2$$

$$\Leftrightarrow \quad r_1^{\,2} \cdot h_1 = \frac{\rho_H}{\rho_W} \cdot r_2^{\,2} \cdot h_2$$

Nun gilt es für beide Fälle, die Größe $r_1$ zu ersetzen, weil man eine Aussage über die Eintauchtiefe erhalten will, die in beiden Fällen durch $h_1$ ausgedrückt werden kann. Dazu wird der Strahlensatz benutzt, der für beide Fälle gleich lautet:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{r_1}{r_2} \Leftrightarrow r_1 = \frac{h_1}{h_2} \cdot r_2$$

Nach einsetzen erhält man

| | |
|---|---|
| $\frac{\rho_W - \rho_H}{\rho_W} \cdot r_2^{\,2} \cdot h_2 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \cdot r_2^{\,2} \cdot h_1$ | $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \cdot r_2^{\,2} \cdot h_1 = \frac{\rho_H}{\rho_W} \cdot r_2^{\,2} \cdot h_2$ |

$r_2$ fällt nun in beiden Fällen heraus, was wir schon erwartet haben. Denn die Breite des Kegels ändert nichts an den Proportionen der Kegelteile "oben" und "unten" zueinander. Man erhält

| | |
|---|---|
| $\Leftrightarrow \quad \frac{\rho_W - \rho_H}{\rho_W} \cdot h_2^{\,3} = h_1^{\,3}$ | $\Leftrightarrow \quad h_1^{\,3} = \frac{\rho_H}{\rho_W} \cdot h_2^{\,3}$ |
| $\Leftrightarrow \quad h_1 = h_2 \cdot \sqrt[3]{\frac{\rho_W - \rho_H}{\rho_W}}$ | $\Leftrightarrow \quad h_1 = h_2 \cdot \sqrt[3]{\frac{\rho_H}{\rho_W}}$ |
| bzw. $\quad \frac{h_1}{h_2} = \sqrt[3]{\frac{\rho_W - \rho_H}{\rho_W}}$ | bzw. $\quad \frac{h_1}{h_2} = \sqrt[3]{\frac{\rho_H}{\rho_W}}$ |

Buchenholz hat eine Dichte von ca. 0,75 g/cm$^3$. Damit ergeben sich die Werte

| | |
|---|---|
| $\frac{h_1}{h_2} = \sqrt[3]{0{,}25} = 0{,}630$ | $\frac{h_1}{h_2} = \sqrt[3]{0{,}75} = 0{,}909$ |

Die Interpretationen lauten nun:

| | |
|---|---|
| Der Kegel taucht mit 37,0% seiner Höhe aus dem Wasser auf. | Der Kegel taucht mit 9,1% seiner Höhe aus dem Wasser auf. |

---

Anmerkung für den auf der linken Blattseite behandelten Fall:
Die Bezeichnungen sind so gewählt worden, dass sie jeweils für einen **vollständigen Kegel** gelten. Insbesondere ist **nicht** davon Gebrauch gemacht worden, dass der eingetauchte Teil des Kegels ein Kegelstumpf ist. Folglich ist auch die **Formel für den Kegelstumpf nicht benutzt** worden. Die Benutzung der Formel hätte den algebraischen Gleichungsteil erheblich verkompliziert. Genauso wäre der Term des Strahlensatzes deutlich umständlicher geworden, wenn man z.B. die Höhe des Kegelstumpfs $h_{St}$ benutzt hätte:

$$\frac{h_2 - h_{St}}{h_2} = \frac{r_1}{r_2} \Leftrightarrow r_1 = \frac{h_2 - h_{St}}{h_2} \cdot r_2$$

Die Differenz macht die Weiterverarbeitung erheblich umständlicher.