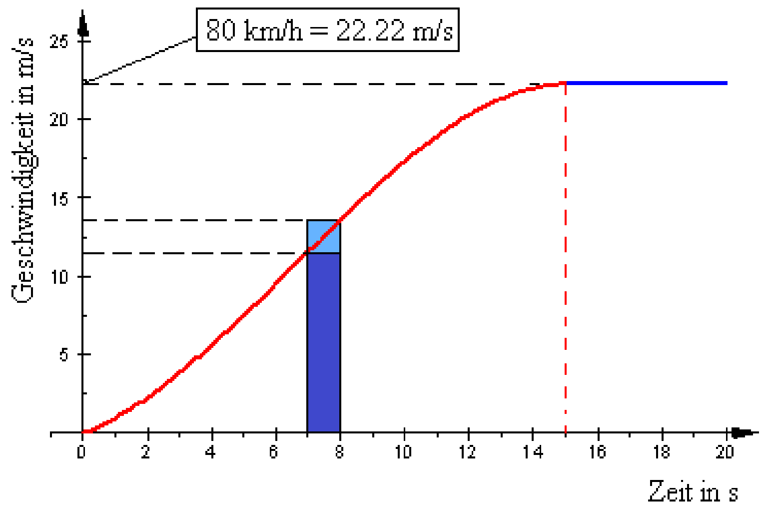
Einführung in die Integralrechnung

Das Diagramm stellt den Beschleunigungsvorgang eines aus dem Stand anfahrenden U-Bahn-Zuges dar. Nach 15 Sekunden hat er seine Endgeschwindigkeit von 80 km/h = 22.22 m/s erreicht. Danach bleibt die Geschwindigkeit konstant. (Es ist x km/h = x:3.6 m/s)



Aufgaben (A1, A2, usw):

a) Der Graph der Geschwindigkeitsfunktion startet bei 0 Sekunden in einem bestimmten Winkel zur Zeit-Achse, bei 15 Sekunden geht der Graph "sanft" in die Gerade über. Was spürt man an diesen beiden Stellen als Fahrgast?

b) Welchen Wert hat die Fläche
b1) des dunkel getönten Balkens und
b2) des dunkel getönten Balkens plus hellerer Aufsatz?

A1: Was bedeuten diese Wert anschaulich, wenn man die Einheit mitberücksichtigt?
A2: Hilfe: Was bedeuten Höhe und Breite des Balkens hier in diesem Diagramm?
A3: Was bedeuten die beiden Flächen im Sachzusammenhang?
A4: Wie lassen sich beide Werte zusammen für eine Verbesserung nutzen?

c) Folgerung aus (b):
A5: Welche Bedeutung hat die gesamte Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeitsfunktion (im Intervall [0..15]) ?

Die Fragen in (a) bis (c) dienen der Einstimmung. Das weitere Thema dieses Arbeitsblattes gliedert sich in vier Schritte:

Schritt I **Berechnung des Flächeninhalts unter dem v-Graphen**

Schritt II **Zusammenhang zwischen der Randfunktion und dem Flächeninhalt**

Schritt III **Experimentelle Nachlese mit GeoGebra**

Schritt IV **Integralfunktion und Hauptsatz**

Schritt I: Berechnung des Flächeninhalts unter dem v-Graphen

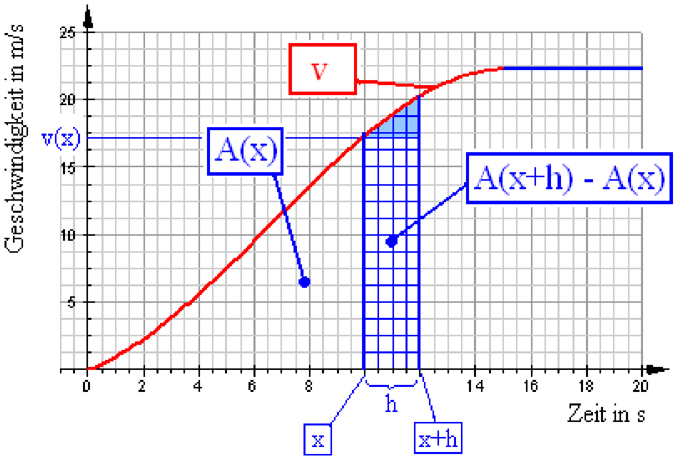
Messungen haben ergeben: Die Geschwindigkeitsfunktion hat den Term $v(x) = -0.01\,x^3 + 0.2x^2 + 0.73x$.
Hierbei hat *x* die Bedeutung der Zeit in Sekunden. Wir benutzen den Variablennamen *x* statt *t*, weil GeoGebra nur die Variable *x* kennt.
Definiere die Funktion *v* in GeoGebra. Setze den Rundungswert auf 5 Stellen. Definiere die Begrenzungslinie „x=15". Gib dann den Befehl ein v1=Funktion[v, 0, 15] und verstecke die Funktion v (RMT, Objekt anzeigen nein). Nun wird die Funktion nur noch im Intervall [0..15] gezeichnet.

Richte einen Schieberegler n ein, er soll von 2 bis maximal 100 reichen und nur ganzzahlig sein.
Gib sodann den Befehl US=Untersumme[v, 0, 15, n] ein. Beachte, wie sich das Bild und der Wert von US in der Algebra-Ansicht ändern, wenn Du den Wert n veränderst.
Nun bilde zusätzlich die Obersumme OS=Obersumme[v, 0, 15, n] und dann den Mittelwert MW aus US und OS.

A6: Beobachte, ob bzw. wie sich der Mittelwert MW mit n verändert. Erinnere dich: Welche Bedeutung hat der Wert im Sachzusammenhang?

Schritt II Zusammenhang zwischen der Randfunktion und dem Flächeninhalt

Studiere die nachstehende Skizze.
Bedeutung: *A(x)* gibt an, welche Strecke nach der Zeit x zurückgelegt wurde. Das kann für U-Bahn-Planung eine durchaus interessante Information sein. *A(x)* ist die Fläche unter der Geschwindigkeitskurve von 0 bis *x*.
Nun vergrößern wir *x* um *h* auf *x+h* . Es kommt der schräg abgeschnittene Balken mit dem Flächenihalt *A(x+h) - A(x)* hinzu. Diese Fläche ist ungefähr so groß wie der in der Höhe *v(x)* abgeschnittene Rechteckbalken, sie unterscheiden sich nur um die eingefärbte Dreiecksfläche.



Als Gleichung erhält man:

$$\underbrace{A(x+h)-A(x)}_{abgeschrägter\ Balken} \approx \underbrace{v(x)\cdot h}_{\text{Rechteckbalken}} \qquad \text{bzw. nach Umstellung} \qquad \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx v(x)$$

Diese Gleichung gilt umso besser, je kleiner *h* ist, weil dann die Dreiecksfläche immer kleiner wird.
Für $h \rightarrow 0$ gilt dann der von uns gesuchte Zusammenhang zwischen den Funktionen *A* und *v* :

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = A'(x) = v(x)$$

Kurzform: Die Randfunktion ist die Ableitung der Flächenfunktion.
Genauer: Die Randfunktion ist die Ableitung derjenigen Funktion, die den Flächeninhalt unter der Randfunktion angibt.

Wir erinnern uns an die Funktion *v*: $v(x) = -0.01\,x^3 + 0.2x^2 + 0.73x$

Mit Hilfe von v konstruieren wir die Funktion A als "Aufleitung" von v, d.h. wir suchen diejenige Funktion A, die abgeleitet v ergibt.
A7: Bitte dein Vorschlag: $A(x) = \ldots$

Möglicherweise hast Du einen bei jeder Aufleitung zu beachtenden Umstand nicht beachtet: Die Ableitung einer Konstanten ist null. Also kann man beim Aufleiten zunächst eine beliebige Konstante dazuaddieren. Allerdings bekommt diese Konstante *im Sachzusammenhang* dann wieder einen bestimmten Wert.
Beispiel: Du hast wahrscheinlich ermittelt, dass $A(x) = -0.0025x^4 + 0.0667x^3 + 0.365x^2$ lautet.
Allgemein richtig wäre aber $A(x) = -0.0025x^4 + 0.0667x^3 + 0.365x^2 + C$.
Welchen Wert hat nun C im Sachzusammenhang. Wir würden in unserem Messexperiment für das Anfahren der U-Bahn sicherlich sagen, dass zu Beginn der Messung, also bei $x = 0$ auch der zurückgelegte Weg null ist, also $A(0) = 0$. Grundsätzlich denkbar wäre auch ein anderer Wert, z.B. $A(0) = 100$. Dann läge die Wegmarke „0“ eben $100\,m$ zurück.
In unserem Beispiel soll nun gelten $A(0) = 0$, also $A(0) = -0 + 0 + 0 + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 0.$

Schritt III: Experimentelle Nachlese mit GeoGebra

Definiere einen Schieberegler u für Werte zwischen 0 und 15, Schrittweite klein (0.001).
Ändere Untersumme und Obersumme in Untersumme[v, 0, u, n] bzw. Obersumme[v, 0, u, n] ab (Doppelklick im Algebrafenster auf die Terme).
A8: Beobachte, was bei Änderung von u mit MW geschieht. Welche Bedeutung hat nun MW?

Aktiviere unter „Ansicht“ die Grafik 2, das Fenster soll neben dem ersten Grafikfenster liegen.
Definiere den Punkt I=(u,MW) und weise ihn unter RMT → Eigenschaften → Erweitert der Grafik 2 zu.
Weise Punkt I mit RTM → „Spur ein“ zu und beobachte, was passiert, wenn Du den Regler u betätigst.
Ggf. musst Du den Ausschnitt von Grafikfenster 2 verändern.

A9: Was geben die Punkte I (bzw. ihr Graf) im Sachzusammenhang an?

Die folgende Aktion erfordert Präzision, sonst ist das Ergebnis nur schlecht:
Lege im Grafikfenster 2 mit hoher Präzision ca 8 Punkte auf den Grafen, der von dem Punkt I geschrieben wurde. Beginne bei (0|0) und verteile die Punkte einigermaßen gleichmäßig, der letzte Punkt (15|y) soll unbedingt auch dabei sein. Du solltest das Fenster vergrößern, um die Punkte präzise setzen zu können. Zum Ausprobieren: Stelle die Punkte als Hohlpunkte der Größe 5 dar.

Gib dann in der Befehlszeile nacheinander die beiden Befehle ein:
ListePunkte={B,C,…} ← trage hier alle oben verteilten Punkte ein.
A(x)=TrendPoly[ListePunkte,4] ← es wird eine Funktion 4. Grades durch die Punkte gelegt. Überzeuge dich: Ein höherer Grad ist nicht notwendig!

A10: Beurteile im Algebrafenster, ob die theoretische Herleitung aus Schritt II ungefähr bestätigt werden kann. Also überprüfe: Gilt $A'(x) = v(x)$?

Teil IV Integralfunktion und Hauptsatz

Wir sind noch nicht ganz zufrieden mit dem Erreichten. Wie wir gesehen haben ist der Zusammenhang zwischen Randfunktion und Flächeninhaltsfunktion mit der Gleichung *A'(x) = v(x)* nicht eindeutig festgelegt, denn beim "Aufleiten" kann eine beliebige Konstante hinzugefügt werden. Man muss in unserem Fall der anfahrenden U-Bahn noch hinzufügen *A(0) = 0*.

Die folgende Schreibweise auf der Ebene der "Aufleitung" enthält diesen Zusatz schon. Beachte: Es handelt sich um Symbole, die sich geschichtlich ergeben haben.

$$\text{gelesen:}\quad \underbrace{A_0(x)}_{\substack{\text{Flächeninhaltsfunktion}\\ (\text{Start bei li. Grenze } 0)}} = \underbrace{\int_0^x v(t)\,dt}_{\substack{\text{Flächeninhalt unter } v\\ \text{von } 0 \text{ bis } x}}$$

Hierbei ist enthalten, dass $A_0(0) = 0$, denn die rechte Seite der Gleichung hat für $x = 0$ die Bedeutung "*Flächeninhalt unter v von 0 bis 0* " und das ist sicherlich 0.

Die Randfunktion bedeutet nun nicht immer eine Geschwindigkeit und folglich die Flächeninhaltsfunktion nicht immer eine Strecke.

Allgemein benutzt man folgende Symbole:

$$\text{gelesen:}\quad \underbrace{I_a(x)}_{\substack{\text{Integralfunktion}\\ (\text{der oberen Grenze})}} = \underbrace{\int_a^x f(u)\,du}_{\substack{\text{Integral über } f\\ \text{von } a \text{ bis } x}}$$

Nach unserer Herleitung gilt entsprechend

$$I_a'(x) = f(x)$$

Man bezeichnet eine Funktion *F*, deren Ableitung die Funktion *f* ergibt, als *Stammfunktion von f* , es gilt also $F'(x) = f(x)$. Folglich sind die beiden Funktionen I_a und *F* bis auf eine Konstante (= Verschiebung in *y*-Richtung) identisch, es gilt $I_a(x) = F(x) + C$.

Man erhält die Gleichung $I_a(x) = \int_a^x f(u)\,du = F(x) + C$.

Die Konstante C kann noch näher bestimmt werden. Nach Definition der Funktion I_a gilt $I_a(a) = 0$ und

für $x = a$ folgt dann $0 = I_a(a) = \int_a^a f(u)\,du = F(a) + C \quad \Leftrightarrow \quad C = -F(a)$

Insgesamt erhält man schließlich $I_a(x) = \int_a^x f(u)\,du = F(x) - F(a)$, wobei *F* eine beliebige Stammfunktion von *f* ist.
Die letzte Aussage bezeichnet man als **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.**

Wird die variable Obergrenze *x* durch eine Konstante *b* ersetzt, so kann man als Integrationsvariable wieder *x* verwenden. Außerdem wird ein weiteres Zwischensymbol zur Aufnahme der Stammfunktion eingeführt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$